

基于位移场的裂纹尖端识别算法

张文东, 李三元, 董登科, 魏玉龙
(中国航空工业集团有限公司 飞机强度研究所, 西安 710065)

摘 要: 提出一种基于位移场的裂纹尖端识别算法。首先建立了与裂尖位置有关的目标函数,将裂尖识别问题转化为求解最小值的优化问题;然后在位移场范围内假设裂尖位置,将非线性优化问题转变为线性问题,在给出裂尖的初始假设位置后,通过该裂尖识别算法迭代分析,最终获得裂纹尖端的准确位置。仿真测试表明,该算法 6 s 内通过 4 步迭代分析就可以得到 I 型裂纹区域的位移场和 I-II 混合型裂纹区域的位移场准确的裂尖位置,该方法为裂纹测量技术提供了技术支持,有极大的应用价值。

关 键 词: 位移场; 裂纹尖端; 应力强度因子; 线性最小二乘法; 迭代分析

中图分类号: V215.2 **文献标志码:** A

Locating the crack tip algorithm based on displacement field

ZHANG Wendong, LI Sanyuan, DONG Dengke, WEI Yulong
(Aircraft Strength Research Institute,
Aviation Industry Corporation of China, Xi'an 710065, China)

Abstract: An algorithm of locating the crack tip based on displacement field around crack tip was proposed. Give the problem of locating the crack tip, the solution was turned to solving the minimum value by building the objective function including crack tip location firstly. And then the location of crack tips was assumed in a format of mesh, nonlinear optimal problem can be analyzed through a linear least squares approach after an assuming crack tip was chosen. The exact crack tip was gotten by iterative analysis. The results show that this algorithm has converged to the I-mode and I-II mix-mode exact crack tip during four iterative steps in six seconds. The algorithm can provide technical assistance for crack measurement technique and has high engineering values.

Key words: displacement field; crack tip; stress intensity factor;
linear least square method; iterative analysis

在工程结构中裂纹普遍存在,随着裂纹不断扩展,结构的强度会极大地降低,因此工程上对裂纹非常重视,如何准确有效地测量裂纹一直是一项重要研究内容。目前在工程上广泛使用的裂纹测量方法主要有直读法、柔度法、电位法和探伤法,这些传统裂纹测量方法限于自身的特点,在裂

纹自动化测量方面受到很多限制。

近年发展迅速的数字图像相关方法,能够直接获得裂尖区域的位移场,为裂纹的测量和分析提供了基础数据。目前通过裂尖区域的位移场评估裂尖位置的方法通常会采用数字图像处理技术,例如 Sobel 或者 Prewitt & Robert 等边缘检

测算法,这些算法在 Matlab 软件中可以直接应用。这种算法根据最大梯度值确定裂纹边界,由于梯度的计算过程会受到噪点的影响,该算法需要对数据进行过滤和光滑处理,这种处理反过来会影响结果的准确性。

另一种方法是在裂尖场的位移方程中将裂尖坐标作为未知数,通过非线性优化算法确定裂尖坐标。张蕊等^[1]基于数字图像相关法(DIC)测量了聚碳酸酯板的应力强度因子,Du等^[2]将数字图像相关法与多点过约束方法相结合,研究了较大尺寸飞机壁板的混合型应力强度因子。这些文献进行裂纹的应力强度因子研究时,一般将裂尖位置作为已知量^[1-2]。Yoneyama等^[3]将前20项William表达式作为数学模型,并使用非线性最小二乘方法进行了求解,由于他们只使用了垂直方向的位移导致分析不能收敛;这种基于梯度的方法对于裂尖位置的初始估计值非常敏感,而且结果可能收敛于局部最优解。为了避免上面方法的缺点,Pacey等^[4]将遗传算法和单纯形法相结合,通过分析光弹数据确定了裂尖位置和应力强

度因子,该方法的应用范围是基于应力场数据;Lopez-Crespo等^[5]通过DIC分析获得的位移场数据使用遗传算法确定了裂尖位置,由于位移场采用了Muskhelishvili表达式,导致计算效率很低。Zanganeh等^[6]利用Matlab优化工具箱中5种优化算法,分析比较了不同优化算法的优劣,通过模拟位移场和真实位移场确定裂尖位置分析了不同方法的收敛性、准确性和计算效率。Harilal等^[7]提出一种算法,该算法在裂尖位置位置的情况下将非线性最小二乘问题转变为线性最小二乘问题,通过分析DIC方法获得的位移场最终确定了裂尖的位置和应力强度因子等参数。

本文提出一种裂尖定位算法,通过建立目标函数将裂纹尖端的识别问题转变为求解最小值的优化问题,通过对裂纹尖端问题的迭代求解,最终获得裂纹尖端的位置。

1 裂尖定位算法原理及实现

I-II混合型裂纹尖端附近的位移场Williams表达式为

$$\begin{cases} u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{\frac{n}{2}}}{2\mu} a_n \left\{ \left[\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right] \cos \frac{n\theta}{2} - \frac{n}{2} \cos \frac{(n-4)\theta}{2} \right\} - \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{\frac{n}{2}}}{2\mu} b_n \left\{ \left[\kappa + \frac{n}{2} - (-1)^n \right] \sin \frac{n\theta}{2} - \frac{n}{2} \sin \frac{(n-4)\theta}{2} \right\} \\ v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{\frac{n}{2}}}{2\mu} a_n \left\{ \left[\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right] \sin \frac{n\theta}{2} + \frac{n}{2} \sin \frac{(n-4)\theta}{2} \right\} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{\frac{n}{2}}}{2\mu} b_n \left\{ \left[\kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n \right] \cos \frac{n\theta}{2} + \frac{n}{2} \cos \frac{(n-4)\theta}{2} \right\} \end{cases} \quad (1)$$

其中 u 为以裂纹尖端为中心沿裂纹方向的位移; v 为以裂纹尖端为中心垂直于裂纹方向的位移; μ 为剪切弹性模量; κ 在平面应力状态下为 $(3-\gamma)/(1+\gamma)$,在平面应变状态下为 $(3-4\gamma)$; γ 为泊松比; r 和 θ 为以裂纹尖端为中心的极坐标。

式(1)中函数展开项的第一项系数 a_1 与I型

应力强度因子 K_I 有如下关系式: $K_I = a_1 \sqrt{2\pi}$;第一项系数 b_1 与II型应力强度因子 K_{II} 有如下关系式: $K_{II} = b_1 \sqrt{2\pi}$,函数展开式的第二项系数 a_2 与 T 应力的关系为 $T = -4a_2$ 。

为了表述的方便,定义以下4个函数

$$f_{n,m}(r, \theta) = \frac{r^{\frac{n}{2}}}{2\mu} \left\{ \left[\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right] \cos \frac{n\theta_m}{2} - \frac{n}{2} \cos \frac{(n-4)\theta_m}{2} \right\} \quad (2)$$

$$g_{n,m}(r, \theta) = \frac{-r^{\frac{n}{2}}}{2\mu} \left\{ \left[\kappa + \frac{n}{2} - (-1)^n \right] \sin \frac{n\theta_m}{2} - \frac{n}{2} \sin \frac{(n-4)\theta_m}{2} \right\} \quad (3)$$

$$h_{n,m}(r, \theta) = \frac{r^{\frac{n}{2}}}{2\mu} \left\{ \left[\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right] \sin \frac{n\theta_m}{2} + \frac{n}{2} \sin \frac{(n-4)\theta_m}{2} \right\} \quad (4)$$

$$l_{n,m}(r, \theta) = \frac{r^{\frac{n}{2}}}{2\mu} \left\{ \left[\kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n \right] \cos \frac{n\theta_m}{2} + \frac{n}{2} \cos \frac{(n-4)\theta_m}{2} \right\} \quad (5)$$

式(1)~式(4)均为三角函数,其参数为极坐标下的 r 和 θ ,与式(1)中的意义相同。

在I-II混合型裂纹区域的位移场中,位移表

达式为

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_{n,m}(r, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_{n,m}(r, \theta) \quad (6)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_{n,m}(r, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n l_{n,m}(r, \theta) \quad (7)$$

考虑实际中不可避免的微小刚体位移和转动, 上式表达式为

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{n=1}^N a_n f_{n,m}(r_i, \theta_i) + \\ &\sum_{n=1}^N b_n g_{n,m}(r_i, \theta_i) + T_x - R y_x \\ v_i &= \sum_{n=1}^N a_n h_{n,m}(r_i, \theta_i) + \\ &\sum_{n=1}^N b_n l_{n,m}(r_i, \theta_i) + T_y + R x_k \end{aligned} \quad (8)$$

式中 T_x 和 T_y 表示 x 方向和 y 方向的刚体平移; R 表示刚体转动; N 表示位移场展开式的项数;

$$\mathbf{h} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,m} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{N,1} & \cdots & f_{N,m} & h_{N,1} & \cdots & h_{N,m} \\ g_{1,1} & \cdots & g_{1,m} & l_{1,1} & \cdots & l_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{N,1} & \cdots & g_{N,m} & l_{N,1} & \cdots & l_{N,m} \\ 1 & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & & 1 \\ -y_1 & \cdots & -y_m & x_1 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ T_x \\ T_y \\ R \end{Bmatrix}$$

为了评价 $\mathbf{A}$ 矩阵结果的优劣, 建立目标函数为

$$J = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_e - \mathbf{B}(x_c, y_c) \mathbf{A}]^T [\mathbf{H}_e - \mathbf{B}(x_c, y_c) \mathbf{A}] \quad (12)$$

式中 $\mathbf{H}_e$ 表示试验获得的位移场; x_c 表示裂尖的 x 坐标; y_c 表示裂尖的 y 坐标。

由于裂尖坐标 (x_c, y_c) 未知, 目标函数 J 不是二次型函数。如果裂纹尖端坐标已知, 目标函数中的 $\mathbf{B}$ 矩阵也可以确定; $\mathbf{A}$ 矩阵中各项均为未知量, 在裂尖坐标已知时, 位移场是关于这些未知量的线性方程, 只要所选点的数目大于或等于未知数个数, $\mathbf{A}$ 矩阵可用线性最小二乘法计算求解, 如下式:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}^T \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{h} \quad (13)$$

其中 $[\mathbf{B}^T \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T$ 是 $\mathbf{B}$ 矩阵的伪逆矩阵。

本文的计算程序能够自动选取位移场中的分析数据, 分析数据选取示意图如图 1 所示, 在真实裂尖 O 点未知的情况下, 图中 O' 点为假设的裂尖位置, 数据在以 O' 点为圆心的环形区域中选取 (图中为灰色区域), 其中圆环的内径为 r_{in} , 外径为 r_{out} , 为了避免裂尖的三维效应和裂尖附近的非

下标 i 表示位移场中的点 (x_i, y_i) 的索引, $i=1, 2, \dots, M$, M 表示位移场数据总数; 以裂纹尖端位置为原点的极坐标方程表示为

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_{O,j})^2 + (y_i - y_{O,j})^2} \quad (9)$$

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{y_i - y_{O,j}}{x_i - x_{O,j}}\right) \quad (10)$$

式中 $x_{O,i}$ 和 $y_{O,i}$ 为直角坐标系下的裂纹尖端坐标; 下标 j 表示位移场中点 $(x_{O,i}, y_{O,i})$ 的索引; $j=1, 2, \dots, K$, K 表示位移场中假设的裂尖位置总数。

对于 m 个点的位移表达式展开前 N 项, 表达为矩阵形式为

$$\mathbf{h} = \mathbf{B} \mathbf{A} \quad (11)$$

式中

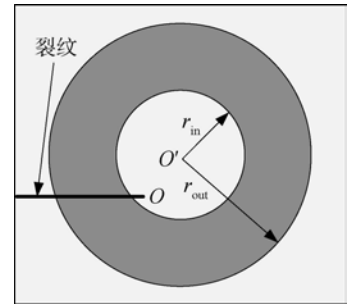


图 1 某裂尖位置处参数优化选点处理 (选取灰色区域内的点)

Fig.1 Process of selecting nodes around the some crack tip (the node in gray zone is chosen)

线性区域^[8-9]影响, 保证 r_{in} 大于试件厚度的一半^[7], 在文献^[7]中要求 r_{out} 需要保证数据点与 O' 的距离小于裂纹长度的 1.5 倍。值得一提的是, 本文中的线性最小二乘模型基于线性断裂力学, 一般不分析处于裂尖塑性区的数据^[10-14]。对这种行为可以作如下解释: 不同于裂尖应力场, 裂尖区域的位移场不存在奇异性^[15], 因此本文对圆环内径的考虑主要是避免三维效应的影响。

由于裂尖位置未知时, 目标函数为非线性问题, 文献^[6]对于该目标函数尝试了 5 种优化算

法,这些算法或者受到初值的限制,或者计算效率低,反映了非线性问题的求解难度。因此本文通过假设裂尖位置从而避免目标函数的非线性问题。按照图 2 的思路生成网格,在位移场区域内任选一点 $O'(x_i, y_j)$,以 O' 点为中心,以一定步长生成网格,网格节点 (x_i, y_j) 均可以作为可能的裂尖位置,其中 $i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$,图中 O 点为真实的裂尖位置,该点位于网格区域内。

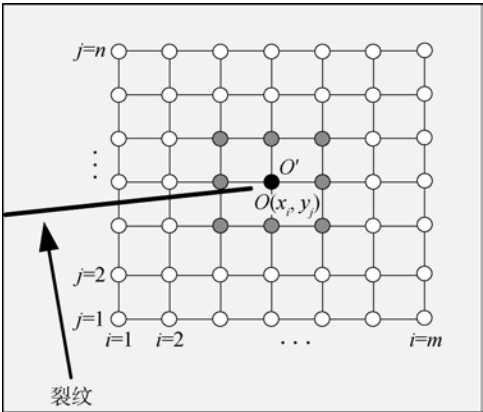


图 2 假想裂尖位置生成示意图

Fig. 2 Diagram of generating assumed locations of crack tip

在裂尖周围的位移场中按照图 2 的方式生成裂尖位置网格分布,网格节点以均匀分布的形式在分析范围内布置有限节点,对每个节点计算目标函数值。首次布置节点时,在全场范围内布置;在随后的布置中,在目标函数最小值对应的节点(如图 2 中黑色节点)的相邻节点(如图 2 中灰色节点)所围成的区域内布置节点。图 3 所示为 I -

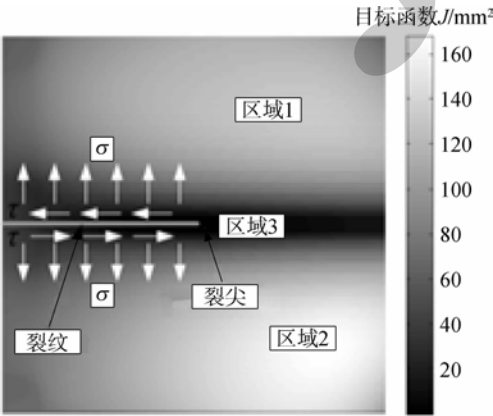


图 3 I - II 混合型裂纹情况下的目标函数值 J 的分布

Fig. 3 Distribution of objective function J value in I - II mix-mode crack case

II 混合型裂纹情况的目标函数 J 的值分布。由图中可以看出,不同位置对应不同的目标函数值,按照目标函数值的大小将图分为 3 个区域(如图 3 中所标注),其中区域 1 和区域 2 中目标函数值较大,且越靠近区域中心位置目标函数值越大;区域 3 目标函数值较小,越靠近区域中心位置目标函数值越小,在区域 3 中越靠近裂纹尖端位置目标函数值越小,因此可以通过在目标函数值分布区域(如图 3)中确定最小值位置的方式来获得裂尖位置。

网格中每一个假设的裂尖位置 (x_i, y_j) 代入式(12),对应地可以计算出目标函数的值 G_{ij} ,计算完所有的裂尖假设位置对应的目标函数值后,选取目标函数最小值对应的位置作为裂尖的位置,该过程可以表示为

$$[A^*, x_c^*, y_c^*] = \operatorname{argmin}[\min(G_{ij})] \\ (i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n) \quad (14)$$

考虑到对式(14)的一次求解的结果 (x_c^*, y_c^*) 很难确保满足误差要求,因此需要在 (x_c^*, y_c^*) 的基础上根据新的步长重新生成网格,再次根据式(14)计算新的裂尖坐标,反复迭代,直至新的裂尖坐标与上次的裂尖坐标保证一定精度时,停止分析,认为新裂尖坐标的位置即为真实裂尖坐标,裂尖识别算法分析流程图如图 4 所示。

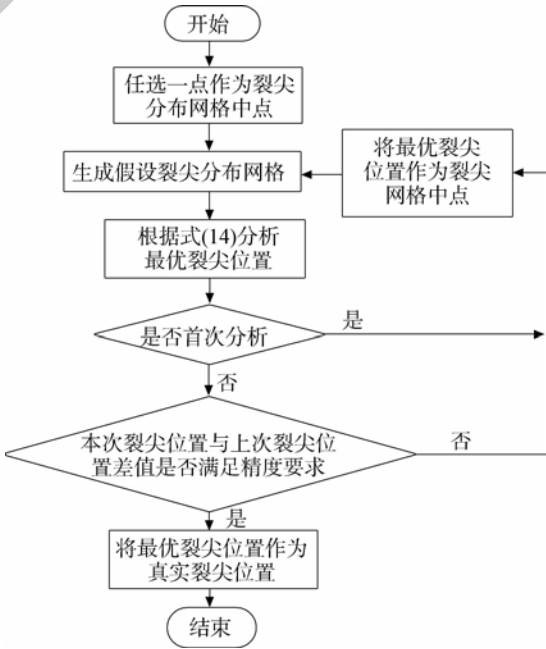


图 4 裂尖识别算法分析流程图

Fig. 4 Analytical flowchart of locating crack tip algorithm

2 模拟位移场

为了验证上节算法的准确性,通过公式(1)生成了裂尖附近的模拟位移场。根据应力强度因子(SIF)与公式中系数的关系,生成纯 I 型裂尖位移场和 I-II 混合型裂尖位移场。I 型裂尖区域模拟位移场见图 5,位移场区域为 5 mm×5 mm,位移场数据密度为 10 points/mm×10 points/mm,裂

尖位置为 (4.53 mm, 4.47 mm),其中 $K_I = 10 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0.5}$; I-II 混合型裂尖位移场见图 6,位移场区域为 5 mm×5 mm,位移场数据密度为 10 points/mm×10 points/mm,裂尖位置为 (4.17 mm, 5.23 mm),其中 $K_I = 10 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0.5}$, $K_{II} = 10 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{0.5}$ 。对于两种位移场对应的 Williams 表达式系数见表 1。

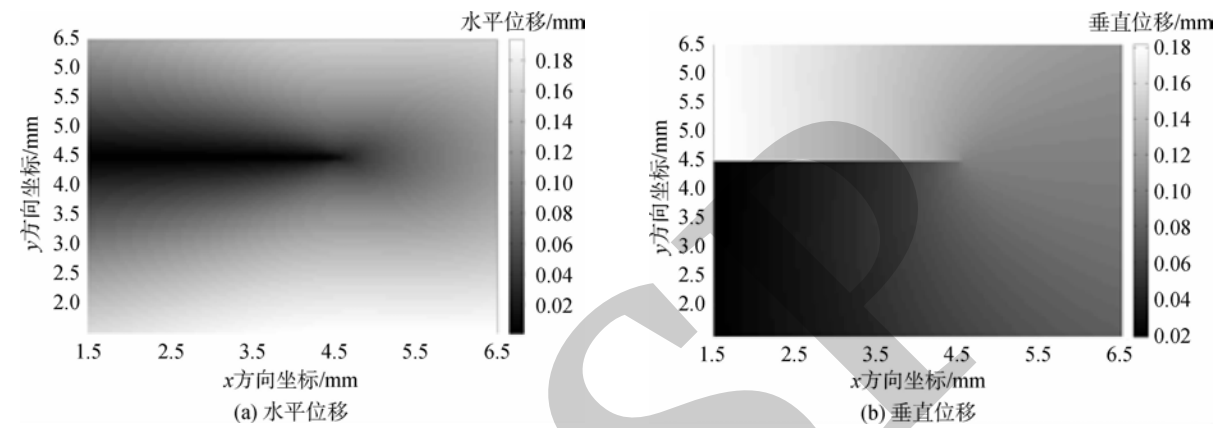


图 5 I 型裂尖区域模拟位移场
Fig. 5 Artificial displacement around the I-mode crack tip

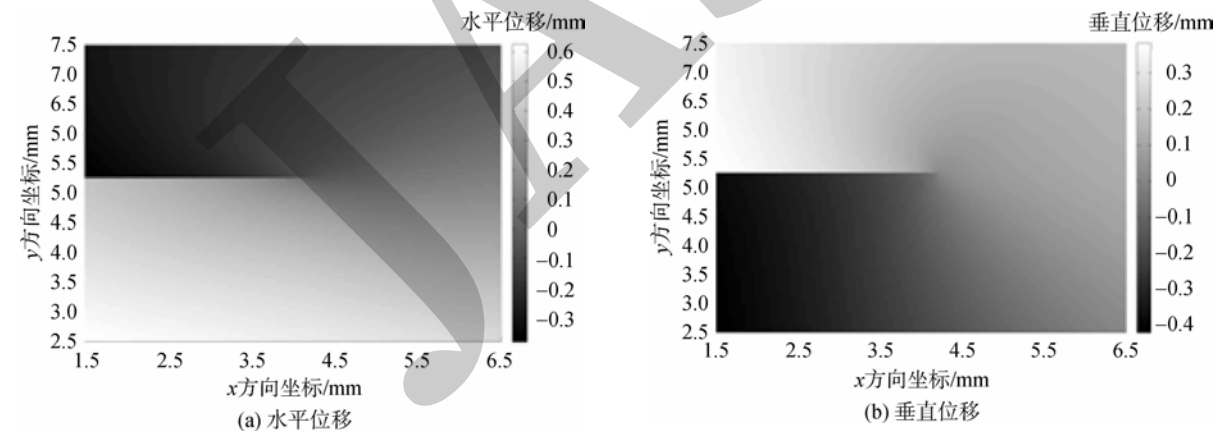


图 6 I-II 混合型裂尖区域模拟位移场
Fig. 6 Artificial displacement around the I-II mix-mode crack tip

表 1 两种类型位移场对应的 Williams 表达式系数和应力强度因子

位移场类型	应力强度因子		Williams 表达式系数			
	$K_I / \text{MPa} \cdot \text{mm}^{0.5}$	$K_{II} / \text{MPa} \cdot \text{mm}^{0.5}$	$a_1 / \text{MPa} \cdot \text{mm}^{0.5}$	a_2 / MPa	$b_1 / \text{MPa} \cdot \text{mm}^{0.5}$	b_2 / MPa
I 型	10	0	3.989 4	0	0	0
I-II 混合型	10	10	3.989 4	0	3.989 4	0

3 算法分析

为了体现表达式项数对分析结果影响的一般性,这里选用 I-II 混合型裂尖位移场作为分析对象。在分析中将裂纹尖端位置选取在坐标 (4 mm, 5 mm) 处,此处不选取准确坐标 (4.17 mm, 5.23 mm),是为了突出不同项数计算结果的差异性。

在式(8)中对级数项 N 的选取范围为 [1, 20], 每个 N 下的目标函数计算值表示在图 7 中, 由图中可见, 随着 N 的增大目标函数减小; 当 $N \leq 6$ 时, 目标函数值的下降非常明显, 当 $N \geq 7$ 时, 目标函数值的下降变得平缓。

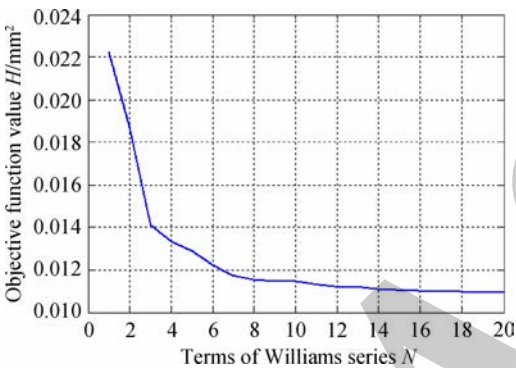


图 7 目标函数值与级数项 N 的关系
Fig. 7 Relation between objective function value and N

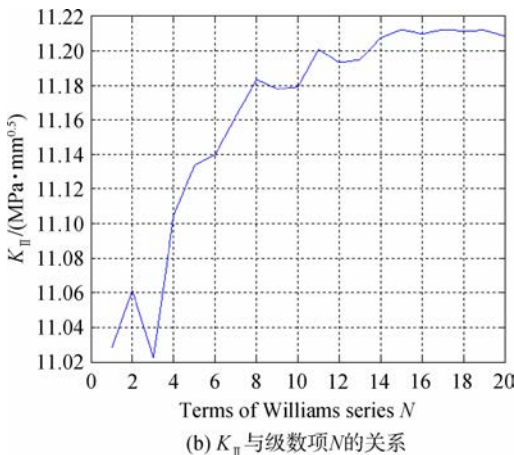
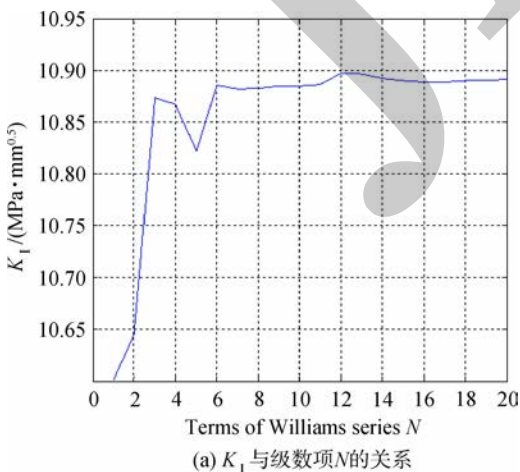


图 8 级数项 N 对应力强度因子的影响

Fig. 8 Effects of N on SIF

I 型应力强度因子 K_I 和 II 型应力强度因子 K_{II} 随着 N 增大的变化见图 8, 图 8(a) 显示随着 N 的增大 K_I 随着增大并趋于定值, 在 $N \leq 6$ 时, 随着 N 值的增大 K_I 的增大非常剧烈; 在 $N > 6$ 时, 随着 N 值的增大 K_I 逐渐稳定趋于平滑。图 8(b) 表示 K_{II} 随着 N 增大的变化, 由图中可见, 图中曲线虽然有些波折, 但是总体呈现随着 N 值增加 K_{II} 逐渐变大的趋势, 在 $N \leq 8$ 时, 随着 N 的增大 K_{II} 增加很显著, 在 $N \geq 8$ 时, K_{II} 的增加逐渐缓和并趋于定值。图 8 中 K_I 和 K_{II} 与准确值的差异是由裂尖位置的偏移引起的。

根据图 7 和图 8 所示, 可以看出项数越大计算结果越稳定, 但是较大的项数会引起计算时间的增加, 因此建议选 $N = 7$, 与文献[7]中的项数选值一样。确定 N 为 7 后, 根据裂尖识别算法分别对 I 型裂尖区域模拟位移场(见图 5)和 I-II 混合型裂尖区域模拟位移场(见图 6)的裂尖位置进行分析, 迭代分析过程中 N 取 7, 迭代终止条件为迭代前后裂尖的距离小于 10^{-4} mm, 分析结果见表 2。

表 2 中详细列出了对 I 型裂纹位移场和 I-II 混合型裂纹位移场的分析结果, 包括了每一步迭代分析前后的裂尖位置、每一步的分析时间、分析得到的裂尖位置和准确裂尖位置的误差。由表中可见, 该算法对两种情况的迭代分析收敛很快, 本例中在第 4 次迭代分析后已经达到了准确裂尖位置, 而且分析时间很小。

表 2 裂尖识别算法对不同裂纹类型位移场的分析

Table 2 Analysis of the current method for the displacement fields of different crack types

类型	迭代 次数	迭代前裂尖位置		迭代后裂尖位置		准确裂尖位置		相对误差/%		时间/s
		<i>x</i> /mm	<i>y</i> /mm	<i>x</i> /mm	<i>y</i> /mm	<i>x</i> /mm	<i>y</i> /mm	<i>x</i>	<i>y</i>	
I 型	1	2.00	2.00	4.50	4.50					0.219
	2	4.5	4.5	4.55	4.45					1.000
	3	4.55	4.45	4.53	4.47					1.844
	4	4.53	4.47	4.53	4.47	4.53	4.47	0	0	2.610
I-II 混合型	1	2.00	2.00	4.00	5.50					0.219
	2	4.00	5.5	4.15	5.25					1.015
	3	4.15	5.25	4.17	5.23					1.812
	4	4.17	5.23	4.17	5.23	4.17	5.23	0	0	2.594

4 结 论

本文提出一种基于裂尖区域位移场的裂尖识别算法。首先在与裂尖位置有关的目标函数基础上,通过假设裂尖位置将非线性优化问题转变为线性优化问题,然后对非线性目标函数进行迭代分析,从而获得裂纹尖端的准确位置。通过对模拟的 I型和 I-II混合型裂纹尖端区域位移场的分析,说明该算法稳定可靠,计算高效。该算法主要优点有:

- 1) 快速准确地获得裂纹的尖端位置。
- 2) 能够准确获得裂纹的 I 型应力强度因子和 II 型应力强度因子。
- 3) 为损伤容限试验技术提供了算法支持,为损伤容限试验技术的自动化提供了技术基础,具有极大的应用价值和前景。

参考文献:

[1] 张蕊,贺玲凤. 数字图像相关法测量聚碳酸酯板应力强度因子[J]. 工程力学,2012,29(12):22-39.
ZHANG Rui, HE Lingfeng. Evaluating stress intensity factor of polycarbonate using digital image correlation[J]. Engineering Mechanics,2012,29(12):22-39. (in Chinese)

[2] DU Y, DÍAZ A, BURGUETE R L, et al. Evaluation using digital image correlation of stress intensity factors in an aerospace panel[J]. Experimental Mechanics,2011,51(1):45-57.

[3] YONEYAMA S, MORIMOTO Y, TAKASHI M. Automatic evaluation of mixed-mode stress intensity factors utilizing digital image correlation[J]. Strain,2006,42(1):21-29.

[4] PACEY M N, JAMES M N, PATTERSON E A. A new photoelastic model for studying fatigue crack closure[J]. Experimental Mechanics,2005,45(1):42-52.

[5] LOPEZ-CRESPO P, BURGUETE R L, PATTERSON E

A, et al. Study of a crack at a fastener hole by digital image correlation[J]. Experimental Mechanics,2009,49(4):551-559.

[6] ZANGANEH M, LOPEZ-CRESPO P, TAI Y H, et al. Locating the crack tip using displacement field data: a comparative study[J]. Strain,2013,49(2):102-115.

[7] HARILAL R, VYASARAYANI C P, RAMJIN M. A linear least squares approach for evaluation of crack tip stress field parameters using DIC[J]. Optics and Lasers in Engineering,2015,75:95-102.

[8] MOGADPALLI G P, PARAMESWARAN V. Determination of stress intensity factor for cracks in orthotropic composite materials using digital image correlation[J]. Strain,2008,44(6):446-452.

[9] SHUKLA A, AGARWAL B, BHUSHAN B. Determination of stress intensity factor in orthotropic composite materials using strain gages[J]. Engineering Fracture Mechanics,1989,32(3):469-477.

[10] HAMAM R, HILD F, ROUX S. Stress intensity factor gauging by digital image correlation: application in cyclic fatigue[J]. Strain,2007,43(3):181-192.

[11] LÓPEZ-CRESPO P, BURGUETE R L, PATTERSON E A, et al. Study of a crack at a fastener hole by digital image correlation[J]. Experimental Mechanics,2009,49(4):551-559.

[12] MOKHTARISHIRAZABAD M, LOPEZ-CRESPO P, MORENO B, et al. Evaluation of crack-tip fields from DIC data: a parametric study[J]. International Journal of Fatigue,2016,89:11-19.

[13] CARROLL J, EFSTATHIOU C, LAMBROS J, et al. Investigation of fatigue crack closure using multiscale image correlation experiments[J]. Engineering Fracture Mechanics,2009,76(15):2384-2398.

[14] YATES J R, ZANGANEH M, TAI Y H. Quantifying crack tip displacement fields with DIC[J]. Engineering Fracture Mechanics,2010,77(11):2063-2076.

[15] EWALDS H L, WANHILL R. Fracture mechanics[M]. London: Arnold,1984.